Fourierova transformácia rovnice vedenia tepla

Riešenie rovnice vedenia tepla na neohraničenom intervale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(x,0) = f(x)$$

viedlo k zavedeniu Fourierovej transformácie. V prípade, že vieme, že použijeme Fourierovu transformáciu, môžeme riešenie dostať jednoduchším postupom. Tranformujeme celý problém Fourierovou transformáciou podľa priestorovej premennej.

Vďaka linearite máme

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = k\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$$

Potrebujeme teda nájsť vzťahy pre Fourierovu transformáciu derivácie funkcie podľa časovej a priestorovej premennej. Derivácia podľa času je jednoduchá.

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{i\omega x}dx = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{i\omega x}dx\right] = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}[u]$$

Zaujímavejšia je Fourierova transformácia derivácie podľa priestorovej premennej.

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}e^{i\omega x}dx = \frac{ue^{i\omega x}}{2\pi}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{i\omega x}dx$$

Túto dostaneme použitím metódy per-partes. Ak predpokladáme, že $u \to 0$ pre $x \to \pm\infty$, tak výraz vpravo sa zjednoduší a dostaneme

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = -i\omega\mathcal{F}[u].$$

Z čoho pre n-tú deriváciu odvodíme

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right] = (-i\omega)^n\mathcal{F}[u].$$

Pre funkciu $u(x,t)$ označme $\mathcal{F}[u] := \overline{U}(\omega,t)$.
Aplikovaním Fourierovej transformácie na rovnicu vedenia tepla dostaneme transformovanú rovnicu

$$\frac{\partial\overline{U}}{\partial t} = -k\omega^2\overline{U}, \quad \overline{U} = \overline{U}(\omega,t)$$

ktorej všeobecné riešenie je

$$\bar{U}(\omega,t)=c(\omega)\,e^{-\varkappa\omega^2 t}$$

Zo začiatočnej podmienky $u(x,0)=f(x)$ dostávame po transformácii

$$\bar{U}(\omega,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}\,dx=F(\omega)=c(\omega)$$

Riešením transformovanej rovnice je teda funkcia

$$\bar{U}(\omega,t)=F(\omega)\,e^{-\varkappa\omega^2 t}.$$

Potrebujeme spočítať inverznú transformáciu funkcie $\bar{U}$. Odvodíme všeobecnejší výsledok pre inverznú transformáciu súčinu funkcií.

Veta o konvolúcii

Nech $H(\omega)=F(\omega)\cdot G(\omega)$, kde $F(\omega)$ a $G(\omega)$ sú Fourierove transformácie funkcií $f(x)$ a $g(x)$. Potom inverzná Fourierova tranformácia funkcie $H(\omega)$ je

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{-i\omega x}\,d\omega=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,G(\omega)e^{-i\omega x}\,d\omega=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x})e^{i\omega\bar{x}}\,d\bar{x}\right]e^{-i\omega x}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x})\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega(x-\bar{x})}\,d\omega\,d\bar{x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x})\,f(x-\bar{x})\,d\bar{x}$$

Integrál $\int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x})f(x-\bar{x})\,d\bar{x}$ nazývame konvolúcia funkcií $g(x)$ a $f(x)$ a označujeme ju $g*f$. Pomerne ľahko je možné ukázať, že $g*f=f*g$.

Teraz sa môžeme vrátiť k riešeniu rovnice vedenia tepla. Už máme riešenie transformovanej rovnice

$$\bar{U}(\omega,t)=F(\omega)\,e^{-\varkappa\omega^2 t},$$

preto podľa už získaných znalostí

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x})\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\varkappa t}}\,e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4\varkappa t}}\,d\bar{x}.$$

Parsevalova rovnosť

Z vety o konvolúcii máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)e^{-i\omega x}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x})f(x-\bar{x})\,d\bar{x}.$$

Špeciálne pre $x=0$ máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(w)G(w)\,dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x})\, f(-\bar{x})\, d\bar{x}.$$

Ak zvolíme $g^*(x) = f(-x)$ ($*$ je komplexné združenie) a uvedomíme si, že

$$F(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iwx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(-s) e^{-iws}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g^*(s) e^{-iws}\,ds = G^*(w)$$

dostávame rovnosť

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(w)\, G^*(w)\,dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x})\, g^*(\bar{x})\,d\bar{x}$$

resp. keďže $z \cdot z^* = |z|^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(w)|^2\,dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |g(\bar{x})|^2\,d\bar{x}.$$

Fourierove sínusové a cosínusové transformácie

Riešenie PDR na neohraničenom intervale $(-\infty,\infty)$ viedlo k Fourierovej transformácii. Pozrime sa teraz na prípad PDR na neohraničenom intervale $(0,\infty)$.

Uvažujme rovnicu vedenia tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0.$$

Nech teplota v bode $x=0$ je konštantne nulová a začiatočné rozloženie teploty je dané funkciou $f(x)$. Máme teda jednu homogénnu okrajovú podmienku.

$$\text{OP:}\quad u(0,t) = 0$$
$$\text{ZP:}\quad u(x,0) = f(x)$$

Riešme túto úlohu metódou separácie premenných

$$u(x,t) = \phi(x)\cdot h(t)$$

Pre h a ϕ dostaneme rovnice

$$\frac{dh}{dt} = -\lambda k h$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi$$

a okrajové podmienky

$$\phi(0) = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} |\phi(x)| < \infty$$

Posledná podmienka zodpovedá $\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0$, pretože zvyčajne predpokladáme $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Podobne ako v prípade neohraničeného intervalu $(-\infty, \infty)$ dostaneme pre ϕ s danými okrajovými podmienkami riešenie len pre $\lambda > 0$, pričom

$$\phi(x) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}x = c_1 \sin\omega x$$

tu $\omega > 0$ a $\omega = \sqrt{\lambda}$. Potom

$$h(t) = ce^{-\lambda\varepsilon t} = ce^{-\varepsilon\omega^2 t}$$

a súčinové riešenie je

$$u(x,t) = A \sin\omega t \cdot e^{-\varepsilon\omega^2 t}.$$

Zo zovšeobecneného princípu superpozície získame riešenie

$$u(x,t) = \int_0^\infty A \sin\omega x \cdot e^{-\varepsilon\omega^2 t}\, d\omega.$$

pričom začiatočná podmienka $u(x,0) = f(x)$ je splnená, ak

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega) \sin\omega x \, d\omega.$$

Poznámka: V prípade Fourierovho transformačného páru

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx, \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega$$

môžeme multiplikatívne konštanty pred integrálmi voliť ľubovoľne tak, aby ich súčin bol $\frac{1}{2\pi}$. Teda pre ľubovoľné $\gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0$ môžeme definovať

$$F(\omega) = \frac{\gamma}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx, \qquad f(x) = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega$$

Vo výraze pre riešenie $u(x,t)$ potrebujeme ešte vyjadriť koeficienty $A(\omega)$. Pretože vo výslednom vyjadrení chceme použiť len $\sin \omega x$ a pracujeme len na intervale $\langle 0, \infty)$, môžeme spraviť nepárne rozšírenie $f(x)$ na $(-\infty, 0)$. Potom z Fourierovej transformácie dostaneme

$$F(\omega) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos \omega x + i \sin \omega x) dx$$

Keďže $f(x)$ je nepárna, $f(x) \cos \omega x$ je nepárna v x a $f(x) \sin \omega x$ je párna v x. Preto predchádzajúci výraz sa zjednoduší na

$$F(\omega) = \frac{2i\gamma}{2\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx$$

a podobne, keďže $F(\omega)$ je nepárna v ω ak $f(x)$ je nepárna v x

$$f(x) = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)(\cos \omega x - i \sin \omega x) d\omega = \frac{-2i}{\gamma} \int_0^{\infty} F(\omega) \sin \omega x \, d\omega$$

Súčin koeficientov je tu $\left(\frac{2i\gamma}{2\pi}\right) \cdot \left(\frac{-2i}{\gamma}\right) = \frac{2}{\pi}$. Číslo γ opäť môžeme zvoliť ľubovoľne. My ho zvolíme tak, aby $-\frac{2i}{\gamma} = 1$. Potom máme

$$F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx := S[f(x)]$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} F(\omega) \sin \omega x \, d\omega := S^{-1}[F(\omega)]$$

Túto dvojicu nazývame Fourierov sínusový transformačný pár. S označuje Fourierovu sínusovú transformáciu, S^{-1} inverznú Fourierovu sínusovú transformáciu.

Podobne, ak $f(x)$ je párna funkcia, dostaneme Fourierov kosínusový transformačný pár

$$F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx := C[f(x)]$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} F(\omega) \cos \omega x \, d\omega := C^{-1}[F(\omega)]$$

Použitím metódy per-partes za predpokladu $f(x) \to 0$ pre $x \to \infty$ sa ľahko odvodia vzťahy pre transformácie derivácie

$$C\left[\frac{df}{dx}\right] = -\frac{2}{\pi} f(0) + \omega S[f]$$
$$S\left[\frac{df}{dx}\right] = -\omega C[f]$$

Z uvedených výrazov vidno, že ak PDR obsahuje prvé derivácie podľa príslušnej premennej, tieto transformácie sa nedajú použiť, pretože v transformovanej rovnici budeme mať transformácie oboch typov.
Transformácie druhých derivácií sú jednoduchšie

$$C\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right] = -\frac{2}{\pi}\frac{df}{dx}(0) - \omega^2 C[f]$$

$$S\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right] = \frac{2}{\pi}\omega f(0) - \omega^2 S[f]$$

Z toho vidíme, že ak chceme použiť Fourierovu kosínusovú transformáciu na riešenie PDR definovanú pre $x>0$, potrebujeme poznať hodnotu $\frac{df}{dx}(0)$. Podobne v prípade sínusovej transformácie potrebujeme $f(0)$.

Aplikujme uvedené poznatky na rovnicu vedenia tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x>0$$

$$u(0,t) = g(t)$$

$$u(x,0) = f(x)$$

Keďže okrajová podmienka je nehomogénna, nemôžeme použiť separáciu premenných. Keďže máme zadané $u(0,t)$ môžeme skúsiť použiť sínusovú transformáciu. Označme $\bar{U}(\omega,t)$ sínusovú transformáciu $u(x,t)$ v premennej x.

$$\bar{U}(\omega,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty u(x,t)\sin\omega x\,dx$$

Z PDR vznikne ODR

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = k\left(\frac{2}{\pi}\omega g(t) - \omega^2\bar{U}\right)$$

so začiatočnou podmienkou

$$\bar{U}(\omega,0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx$$

Riešenie takejto všeobecnej úlohy je pomerne komplikované.
Pre špeciálny prípad $g(t)=0$ však dostaneme rovnicu

$$\frac{\partial\bar{U}}{\partial t} = -k\omega^2\bar{U},$$

preto

$$\bar{U}(\omega,t)=c(\omega)e^{-\varepsilon\omega^2 t}$$

pričom $c(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx$ dostaneme zo začiatočnej podmienky.

Riešenie pôvodnej PDR je teda

$$u(x,t)=\int_0^\infty c(\omega)e^{-\varepsilon\omega^2 t}\sin\omega x\,d\omega.$$

Keďže $c(\omega)$ je nepárna funkcia vzhľadom na ω môžeme $u(x,t)$ prepísať na

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty c(\omega)e^{-\varepsilon\omega^2 t}\sin\omega x\,d\omega=\int_{-\infty}^\infty \frac{c(\omega)}{2i}e^{-\varepsilon\omega^2 t}e^{i\omega x}d\omega$$

Ak spravíme nepárne rozšírenie $f(x)$, tak

$$\frac{c(\omega)}{2i}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\frac{\sin\omega x}{2i}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\frac{\sin\omega x}{2i}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}dx$$

Čo je presne výsledok pre rovnicu vedenia tepla na neohraničenom intervale $(-\infty,\infty)$.
Preto

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}}\int_{-\infty}^\infty f(\bar{x})e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4\varepsilon t}}d\bar{x}$$

Využitím nepárnosti funkcie $f(\bar{x})$ môžeme prepísať posledný výraz na

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}}\left[\int_{-\infty}^{0}-f(-\bar{x})e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4\varepsilon t}}d\bar{x}+\int_0^\infty f(\bar{x})e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4\varepsilon t}}d\bar{x}\right]$$

Po substitúcii $s=-\bar{x}$ a preznačení s späť na $\bar{x}$ dostaneme

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}}\int_0^\infty f(\bar{x})\left[e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4\varepsilon t}}-e^{-\frac{(x+\bar{x})^2}{4\varepsilon t}}\right]dx$$